MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
A. Ribelles, D. Rost

WS 2019/20
Blatt 9
18.12.2019

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ -Lösungsvorschlag-

1. Gegeben ist die inhomogene lineare Differentialgleichung 2 Ordung

$$y'' + 4\,y = \sin(2x). \qquad (*)$$

Wir betrachten zunächst die homogene lineare Differentialgleichung

$$y'' + 4\,y = 0 \qquad (*_0)$$

Allgemeine Lösung von $(*_0)$:
Das charakteristische Polynom von $(*_0)$

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 4 = (\lambda - 2i)(\lambda + 2i)$$

hat die beiden konjugiert–komplexen Nullstellen $\lambda_{1,2} = \varrho \pm i\sigma = \pm 2i$, also mit $\varrho = 0$ und $\sigma = 2$; damit bilden die beiden Funktionen

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = e^{\varrho x}\cos(\sigma x) = \cos(2x),$$

und

$$\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_2(x) = e^{\varrho x}\sin(\sigma x) = \sin(2x),$$

ein Fundamentalsystem von $(*_0)$. Die allgemeine Lösung von $(*_0)$ ist damit

$$\varphi_{c_1,c_2}(x) = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x), \;\; x \in \mathbb{R}, \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Partikuläre Lösung von $(*)$:
Die rechte Seite der inhomogenen linearen DGL

$$y'' + 4\,y = \sin(2x) \qquad (*)$$

ist von der Form $b(x) = p(x)\,e^{a\,x}\,\sin(k\,x)$ mit der Polynomfunktion $p(x) = 1$ vom Grade $m = 0$, $a = 0$ und $k = 2$. Da $a + ik = 2i$ eine einfache Nullstelle von $\chi(\lambda)$ ist, ist die Vielfachheit $\alpha = 1$. Für die partikuläre Lösung φ_p von $(*)$ wählen wir damit den Ansatz

$$\begin{aligned}\varphi_p(x) &= q_1(x)e^{ax}\cos(kx) + q_2(x)e^{ax}\sin(kx) = q_1(x)\cos(2x) + q_2(x)\,\sin(2x)\\ &= (r_1x + s_1)\cos(2x) + (r_2x + s_2)\sin(2x), \quad x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

mit Polynomfunktionen $q_1(x) = r_1\,x + s_1$ und $q_2(x) = r_2\,x + s_2$ vom Grade $m + \alpha = 0 + 1 = 1$; nachdem $x \longmapsto s_1\cos(2x)$ und $x \longmapsto s_2\sin(2x)$ die homogene Gleichung $(*_0)$ lösen, können wir $s_1 = s_2 = 0$ wählen. Wir machen also für φ_p nun den modifizierten Ansatz

$$\varphi_p(x) = r_1x\,\cos(2x) + r_2x\,\sin(2x)$$

und haben dann

$$\begin{aligned}\varphi_p'(x) &= r_1\,(\cos(2x) - 2x\,\sin(2x)) + r_2\,(\sin(2x) + 2x\,\cos(2x))\\ &= (r_1 + 2r_2x)\cos(2x) + (r_2 - 2r_1x)\sin(2x)\\ \varphi_p''(x) &= (2r_2\cos(2x) - 2\,(r_1 + 2r_2x)\sin(2x)) + (-2r_1\sin(2x) + 2\,(r_2 - 2r_1x)\cos(2x))\\ &= 4\,(r_2 - r_1x)\cos(2x) - 4\,(r_1 + r_2x)\sin(2x), \quad \text{jeweils } \; x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Es ist dann

φ_p Lösung von $(*)$

$$\begin{aligned}
&\iff 4(r_2 - r_1 x)\cos(2x) - 4(r_1 + r_2 x)\sin(2x) + 4(r_1 x\cos(2x) + r_2 x\sin(2x)) = \sin(2x)\ \forall\, x \in \mathbb{R} \\
&\iff 4\,r_2\,\cos(2x) - 4\,r_1\,\sin(2x) = \sin(2x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \\
&\iff 4\,r_2\,\cos(2x) + (-4\,r_1 - 1)\,\sin(2x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \\
&\iff r_2 = 0 \quad \wedge \quad r_1 = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Also ist $\varphi_p(x) = -\frac{1}{4}\,x\,\cos(2x),\ x \in \mathbb{R}$, eine partikuläre Lösung von $(*)$.

<u>Allgemeine Lösung von $(*)$:</u>
Damit ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi(x) = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) - \frac{1}{4}x\cos(2x), \quad x \in \mathbb{R},$$

mit $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von $(*)$.
<u>Lösung des AWP:</u>
Mit

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \big(c_1 - \frac{1}{4}x\big)\cos(2x) + c_2\sin(2x) \\
\varphi'(x) &= -\frac{1}{4}\cos(2x) - 2\left(c_1 - \frac{x}{4}\right)\sin(2x) + 2c_2\cos(2x) \\
&= \left(2c_2 - \frac{1}{4}\right)\cos(2x) - 2\left(c_1 - \frac{x}{4}\right)\sin(2x)
\end{aligned}$$

ergibt sich unter Berücksichtigung der gegebenen Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}
y(0) = 0 \quad &: \quad c_1\cos 0 + c_2\sin 0 = 0 \iff c_1 = 0 \\
y'(0) = 0 \quad &: \quad \left(2c_2 - \frac{1}{4}\right)\cos 0 - 2c_1\sin 0 = 0 \iff 2c_2 = \frac{1}{4} \iff c_2 = \frac{1}{8};
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\varphi(x) = \frac{1}{8}\sin(2x) - \frac{x}{4}\cos(2x), \quad x \in \mathbb{R},$$

die (maximale) Lösung des gegebenen Anfangswertproblems.

2. Gegeben ist die inhomogene lineare Differentialgleichung 2 Ordung

$$y'' - 2y' + 5y = 4e^x\sin(x). \qquad (*)$$

Wir betrachten zunächst die homogene lineare Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + 5y = 0 \qquad (*_0)$$

<u>Allgemeine Lösung von $(*_0)$:</u>
Das charakteristische Polynom von $(*_0)$

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$$

hat die beiden konjugiert–komplexen Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}\, i}{2} = 1 \pm 2i.$$

also

$$\lambda_{1,2} = \varrho \pm \sigma\, i \quad \text{mit} \quad \varrho = 1 \quad \text{und} \quad \sigma = 2;$$

damit bilden die beiden Funktionen

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = e^{\varrho x} \cos(\sigma x) = e^x \cos(2x),$$

und

$$\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_2(x) = e^{\varrho x} \sin(\sigma x) = e^x \sin(2x),$$

ein Fundamentalsystem von $(*_0)$. Die allgemeine Lösung von $(*_0)$ ist damit

$$\varphi_{c_1,c_2}(x) = c_1 e^x \cos(2x) + c_2 e^x \sin(2x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Partikuläre Lösung von $(*)$:
Die rechte Seite von $(*)$ ist von der Form $b(x) = p(x)\, e^{a\,x} \sin(k\,x)$ mit der Polynomfunktion $p(x) = 4$ vom Grade $m = 0$, $a = 1$ und $1 = 2$. Da $a + ik = 1 + i$ keine Nullstelle von $\chi(\lambda)$ ist, ist die Vielfachheit $\alpha = 0$.
Für die partikuläre Lösung φ_p von $(*)$ wählen wir damit den Ansatz

$$\begin{aligned}\varphi_p(x) &= q_1(x) e^{ax} \cos(kx) + q_2(x) e^{ax} \sin(kx) \;=\; q_1(x) e^x \cos(x) + q_2(x) e^x \sin(x)\\ &= r e^x \cos(x) + s e^x \sin(x), \quad x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

mit Polynomfunktionen $q_1(x) = r$ und $q_2(x) = s$ vom Grade $m + \alpha = 0 + 0 = 0$.

Es ist

$$\begin{aligned}\varphi_p'(x) &= re^x \cos x - re^x \sin x + se^x \sin x + se^x \cos x\\ \varphi_p''(x) &= re^x \cos x - re^x \sin x - re^x \sin x - re^x \cos x\\ &\quad + se^x \sin x + se^x \cos x + se^x \cos x - se^x \sin x\\ &= -2re^x \sin x + 2se^x \cos x\,, \qquad \text{jeweils } x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Es ist dann

$$\begin{aligned}&\varphi_p \text{ Lösung von } (*) \iff \varphi_p''(x) - 2\varphi_p'(x) + 5\varphi_p(x) = 4e^x \sin(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\\ &\iff -2re^x \sin x + 2se^x \cos x - 2re^x \cos x + 2re^x \sin x - 2se^x \sin x - 2se^x \cos x\\ &\qquad + 5re^x \cos x + 5se^x \sin x \;=\; 4e^x \sin(x)\ \ \forall x \in \mathbb{R}\\ &\iff (2s - 2r - 2s + 5r)e^x \cos x \;+\; (-2r + 2r - 2s + 5s - 4)e^x \sin x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\\ &\iff 3re^x \cos x + (3s-4)e^x \sin x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\\ &\iff 3r = 0 \quad \wedge \quad 3s - 4 = 0\\ &\iff r = 0 \quad \wedge \quad s = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Also ist $\varphi_p(x) = \frac{4}{3} e^x \sin x,\ x \in \mathbb{R}$, eine partikuläre Lösung von $(*)$.

Allgemeine Lösung von $(*)$:
Damit ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi(x) = c_1 e^x \cos(2x) + c_2 e^x \sin(2x) + \frac{4}{3}\, e^x \sin x,, \quad x \in \mathbb{R},$$

mit c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$, die allgemeine Lösung von $(*)$.

3. Wir betrachten die Differentialgleichung (wir schreiben y statt $f(x)$)

$$y' = y \cdot \Big(\frac{1}{x} + \cos(x)\Big), \quad x > 0. \qquad (*_0)$$

Hierbei handelt es sich um eine homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit der stetigen Funktion

$$a :]0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad a(x) = \frac{1}{x} + \cos(x).$$

Eine Stammfunktion A von a ist

$$A(x) = \ln x + \sin x, \ \ x > 0.$$

Folglich ist (wir schreiben f statt wie üblich φ_c)

$$f(x) = c\, e^{A(x)} = c\, e^{\ln x + \sin x} = c e^{\ln x} \cdot e^{\sin x} = c \cdot x \cdot e^{\sin x}, \quad x > 0,$$

mit $c \in \mathbb{R}$, die allgemeine Lösung von $(*_0)$ (weil aber die Zielmenge von f laut Angabe $]0, \infty[$ sein soll, dürfen wir nur $c > 0$ betrachten).

Wir bestimmen nun $c > 0$ so, daß

$$\frac{k\pi}{2e} \leq f\Big(\frac{k\pi}{2}\Big) \leq \frac{k\pi e}{2} \qquad (+)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Es ist

$$f\Big(\frac{k\pi}{2}\Big) = c \cdot \frac{k\pi}{2} \cdot e^{\sin(\frac{k\pi}{2})} = \begin{cases} c \cdot \frac{k\pi}{2} \cdot e^1 \ , & \text{für } \ k = 1, 5, 9, 13, ... \\ c \cdot \frac{k\pi}{2} \cdot e^{-1}, & \text{für } \ k = 3, 7, 11, 15, ... \\ c \cdot \frac{k\pi}{2} \cdot e^0, & \text{für } \ k = 2, 4, 6, 8, ... \end{cases} .$$

Wir unterscheiden 3 Fälle:

1.Fall: $k \in \{1, 5, 9, 13, ...\}$, also $k = 4l + 1, l \in \mathbb{N}_0$.

Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{k\pi}{2e} &\leq f\Big(\frac{k\pi}{2}\Big) = c \cdot \frac{k\pi}{2} \cdot e^1 \iff \frac{1}{e^2} \leq c, \qquad \text{und} \\ \frac{k\pi e}{2} &\geq f\Big(\frac{k\pi}{2}\Big) = c \cdot \frac{k\pi}{2} \cdot e^1 \iff c \leq 1. \end{aligned}$$

Also ist (+) für alle $k = 4l + 1, l \in \mathbb{N}_0$, genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{1}{e^2} \leq c \leq 1.$$

2.Fall: $k \in \{3, 7, 11, 15, ...\}$, also $k = 4l + 3, l \in \mathbb{N}_0$.

Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{k\pi}{2e} &\leq f\Big(\frac{k\pi}{2}\Big) = c \cdot \frac{k\pi}{2} \cdot e^{-1} \iff 1 \leq c, \qquad \text{und} \\ \frac{k\pi e}{2} &\geq f\Big(\frac{k\pi}{2}\Big) = c \cdot \frac{k\pi}{2} \cdot e^{-1} \iff c \leq e^2. \end{aligned}$$

Also ist (+) für alle $k = 4l + 1, l \in \mathbb{N}_0$, genau dann erfüllt, wenn

$$1 \leq c \leq e^2.$$

3.Fall: $\quad k \in \{2, 4, 6, 8, ...\}$, also $k = 2l + 2, l \in \mathbb{N}_0$.

Dann ist

$$\frac{k\pi}{2e} \leq f\Big(\frac{k\pi}{2}\Big) = c \cdot \frac{k\pi}{2} \iff \frac{1}{e} \leq c, \qquad \text{und}$$
$$\frac{k\pi e}{2} \geq f\Big(\frac{k\pi}{2}\Big) = c \cdot \frac{k\pi}{2} \iff c \leq e.$$

Also ist (+) für alle $k = 2l + 2, l \in \mathbb{N}_0$, genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{1}{e} \leq c \leq e.$$

Insgesamt ist also (+) für alle $k \in \mathbb{N}$ genau dann erfüllt, wenn

$$c = 1.$$

Damit ist die einzige stetig differenzierbare Funktion

$$f :]0, \infty[\longrightarrow]0, \infty[\ ,$$

die die in der Aufgabenstellung angegebenen Bedingungen erfüllt

$$f(x) = x \cdot e^{\sin x}, \quad x > 0.$$

4. Es handelt sich bei

$$y' = \frac{y^2}{x(x+1)}, \quad -1 < x < 0,$$

um eine Differentialgleichung $y' = h(x) \cdot g(y)$ mit getrennten Variablen mit den stetigen Funktionen

$$h :]-1, 0[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{1}{x(x+1)}, \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(y) = y^2.$$

Man beachte, daß wir, im Hinblick auf die Angangsbedingung $y(-\frac{1}{2}) = 1$, für den Definitionsbereich von h ein (möglichst großes) Intervall I wählen müssen, welches $-\frac{1}{2}$ enthält, also $I =]-1, 0[$.

Die Funktion g ist sogar stetig differenzierbar, also ist die Bedingung ii) aus 2.8 erfüllt und es gibt nach 2.8 zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutig bestimmte Lösung $\varphi : D_\varphi \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(x_0) = y_0$. Zunächst liefert die Nullstelle $y_1 = 0$ von g die konstante Lösungen

$$\varphi_1 :]-1, 0[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = 0,$$

und eine Lösung φ kann, wegen der Eindeutigkeit, keinen Punkt mit φ_1 gemeinsam haben (also $G_\varphi \cap G_{\varphi_1} = \varnothing$); es gilt also entweder

$$\varphi > 0 \qquad \text{oder} \qquad \varphi < 1 \qquad .$$

Aufgrund der Anfangsbedingung $y(-\frac{1}{2}) = 1 > 0$ müssen wir also nur die DGL

$$y' = \frac{y^2}{x(x+1)}, \quad -1 < x < 0,\ y > 0,$$

betrachten. Wir trennen die Variablen und formen äquivalent um

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{y^2}{x(x+1)} \\
\int \frac{1}{y^2}\,dy &= \int \frac{1}{x(x+1)}\,dx \;=\; \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx \qquad \text{(Partialbruchzerlegung!)} \\
-\frac{1}{y} &= \ln|x| - \ln|x+1| + c \qquad \text{(für eine Konstante } c \in \mathbb{R}\text{)} \\
y(-\tfrac{1}{2}) = 1: \quad -\tfrac{1}{1} &= \ln|-\tfrac{1}{2}| - \ln|-\tfrac{1}{2}+1| + c \quad \Longrightarrow \quad -1 = \ln(\tfrac{1}{2}) - \ln(\tfrac{1}{2}) + c \;\Longrightarrow\; c = -1 \\
\frac{1}{y} &= -\ln(-x) + \ln(x+1) + 1 \;=\; \ln(\tfrac{x+1}{-x}) + 1 \\
y &= \frac{1}{\ln(\frac{x+1}{-x}) + 1}.
\end{aligned}$$

Die maximale Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$\varphi : D_\varphi \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\ln(\frac{x+1}{-x}) + 1},$$

wobei für den maximalen Definitionsbereich gilt:

$$D_\varphi = \Big] -\frac{e}{e+1},\ 0\Big[.$$

Hierzu beachte man, daß ja $\varphi(x) > 0$ für alle $x \in D_\varphi \subset]-1,0[$ gelten muß: es ist für $x \in]-1,0[$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ln(\frac{x+1}{-x}) + 1} > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \ln\Big(\frac{x+1}{-x}\Big) + 1 > 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \ln\Big(\frac{x+1}{-x}\Big) > -1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{x+1}{-x} > e^{-1} \qquad \text{(}e\text{-Funktion, bzw. ln, ist streng monoton wachsend)} \\
&\overset{-x>0}{\Longleftrightarrow} \quad x + 1 > -\frac{x}{e} \\
&\Longleftrightarrow \quad x + \frac{x}{e} > -1 \\
&\Longleftrightarrow \quad x\Big(1 + \frac{1}{e}\Big) > -1 \\
&\Longleftrightarrow \quad x > \frac{-1}{1 + \frac{1}{e}} = -\frac{e}{e+1}.
\end{aligned}$$